Prüfungstraining Mathematik 2 – Expertenpuzzle „Funktionsgraphen“

Expertengruppe A: Polstellen

Besprecht in eurer Gruppe folgende Fragen bzw. Arbeitsaufträge und löst die entsprechenden Aufgaben. Greift dabei auch auf Schulbücher oder Internet als Informationsquelle zurück.

Macht euch Notizen über die Lösungen sowie die wesentlichen mathematischen Inhalte, über die ihr in eurer Gruppe diskutiert, damit jeder einzelne von euch sie in der folgenden gemischten Gruppe anderen Kursteilnehmern vorstellen kann.

1) Gegeben sei eine gebrochen rationale Funktion $f(x) = \frac{p_z(x)}{q_n(x)}$

   (das Zählerpolynom hat den Grad z: $p_z(x) = a_z x^z + a_{z-1} x^{z-1} + ... + a_1 x + a_0$,
   das Nennerpolynom hat den Grad n: $q_n(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0$).

   Wie bestimmt man die maximale Definitionsmenge für diese Funktion?

2) Gebt jeweils ein Beispiel für eine gebrochen rationale Funktion an:
   a) mit einer einfachen Polstelle an der Stelle $x_0 = 3$
   b) mit einer doppelten Polstelle an der Stelle $x_0 = -5$
   c) mit den beiden Polstellen aus a) und b) sowie einer dreifachen Polstelle bei $x_0 = 0$
   d) mit einer hebbaren Definitionslücke an der Stelle $x_0 = 0{,}5$
   e) ohne Definitionslücke (aber mit $n > 0$, d.h. mit einem Polynom $q_n(x) \neq$ const. im Nenner)

3) Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$ besitzt eine senkrechte Asymptote.
   a) Gebt eine Gleichung für diese Gerade an. Ist dies eine Funktionsgleichung?
   b) Bestimmt die Ableitung von $f(x)$ und berechnet die Grenzwerte
   $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f'(x)$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f'(x)$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x)$ und $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$.

4) Zeichnet die Graphen der beiden Funktionen $f(x)$ und $f'(x)$ aus 3) in ein Diagramm.
   Deutet den Zusammenhang zwischen den beiden Funktionen (das Verhalten der Graphen an der Polstelle) geometrisch.

   Formuliert eine allgemeine Regel, die auch für $g(x) = \frac{1}{x^3}$ und deren Ableitung $g'(x)$ gültig ist.

5) Betrachtet nun die Funktion $g(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1}$.
   Bestimmt die Position eventueller Polstellen und gebt ggf. die Gleichungen der Asymptoten an.
   Diskutiert das Verhalten von g an der Polstelle, indem ihr die Limites von $g(x)$ und $g'(x)$ berechnet.
   Skizziert grob den Bereich des Graphen von g, über den ihr nun eine Aussage treffen könnt, ohne weitere Werte zu berechnen.

Prüfungstraining Mathematik 2 – Expertenpuzzle „Funktionsgraphen“

Expertengruppe B: Verhalten im Unendlichen

Besprecht in eurer Gruppe folgende Fragen bzw. Arbeitsaufträge und löst die entsprechenden Aufgaben. Greift dabei auch auf Schulbücher oder Internet als Informationsquelle zurück.

Macht euch Notizen über die Lösungen sowie die wesentlichen mathematischen Inhalte, über die ihr in eurer Gruppe diskutiert, damit jeder einzelne von euch sie in der folgenden gemischten Gruppe anderen Kursteilnehmern vorstellen kann.

1) Gegeben sei eine gebrochen rationale Funktion $f(x) = \frac{p_z(x)}{q_n(x)}$.

   (das Zählerpolynom hat den Grad z: $p_z(x) = a_z x^z + a_{z-1} x^{z-1} + ... + a_1 x + a_0$,
   das Nennerpolynom hat den Grad n: $q_n(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0$).

   Welches „Verhalten im Unendlichen“ (für $x \to \pm\infty$) ist grundsätzlich möglich?
   Zählt die verschiedenen Möglichkeiten anhand von kleinen Skizzen auf.

2) Untersucht die Funktionen $f_1(x) = \frac{x+1}{x}$ und $f_2(x) = \frac{x+1}{x^2}$ auf waagrechte Asymptoten, indem ihr jeweils die Grenzwerte im Unendlichen, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_i(x)$, berechnet.

   Formt hierzu zunächst die Funktionsterme in Summen um.

3) Bestimmt nun die Ableitungen der beiden Funktionen $f_i(x)$ (Achtung: Wenn ihr nicht die Summenformen aus der letzten Aufgabe verwendet, braucht ihr die Quotientenregel!)
   und betrachtet ebenfalls deren Verhalten im Unendlichen durch Berechnung von $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_i'(x)$.

   Vergleicht das Ergebnis mit dem aus Aufgabe 2).

4) Wie hängt das Verhalten im Unendlichen vom Grad z und n der Polynome in Zähler und Nenner einer gebrochen rationalen Funktion $f(x) = \frac{p_z(x)}{q_n(x)}$ ab?

   Unterscheidet die Fälle $z < n$, $z = n$, $z = n+1$ und $z > n+1$.
   Stellt einfache Regeln auf, wie man in diesen Fällen lediglich aus den Zahlen a_z und b_n die Grenzwerte $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$ bestimmen kann.

5) Betrachtet nun die Funktion $g(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1}$.

   Diskutiert ausschließlich das Verhalten der Funktion im Unendlichen, indem ihr die Limites von $g(x)$ und $g'(x)$ berechnet bzw. die in 4) gefundenen Regeln anwendet.

   Skizziert grob den Bereich des Graphen von $g(x)$, über den ihr nun eine Aussage treffen könnt, ohne weitere Werte zu berechnen.

Prüfungstraining Mathematik 2 – Expertenpuzzle „Funktionsgraphen“

Expertengruppe C: Stellen mit waagrechter Tangente

Besprecht in eurer Gruppe folgende Fragen bzw. Arbeitsaufträge und löst die entsprechenden Aufgaben. Greift dabei auch auf Schulbücher oder Internet als Informationsquelle zurück.

Macht euch Notizen über die Lösungen sowie die wesentlichen mathematischen Inhalte, über die ihr in eurer Gruppe diskutiert, damit jeder einzelne von euch sie in der folgenden gemischten Gruppe anderen Kursteilnehmern vorstellen kann.

1) Gegeben sei eine beliebige Funktion $f(x)$.
Welche Bedingung muss für die Stelle x_0 erfüllt sein, damit der Graph von $f(x)$ dort eine Stelle mit waagrechter Tangente besitzt? Skizziert vier unterschiedliche Fälle, wie der Funktionsgraph von f in der Nähe der Stelle x_0 aussehen kann.

2) Bildet die Ableitungen der Funktionen $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x^3$ und $f_3(x) = -x^4$.
Bestimmt jeweils die Stelle x_0, für die der Graph der Funktion eine waagrechte Tangente besitzt, und entscheidet, um welchen der vier Fälle aus 1) es sich jeweils handelt.
Gebt den Funktionsterm einer Funktion $f_4(x)$ an, die den noch fehlenden Fall abdeckt.

3) Skizziert die Graphen von $f_1(x)$ und $f_2(x)$.
Folgt aus der Tatsache, dass der Graph an der Stelle x_0 eine waagrechte Tangente besitzt, automatisch, dass sich dort ein Hoch- oder Tiefpunkt befindet?
(Tipp: Betrachtet das Verhalten von $f_i(x)$ links und rechts von x_0.)

4) Beschreibt in eigenen Worten den Unterschied zwischen den beiden Graphen, und warum einer der beiden an der Stelle x_0 keinen Hoch-/Tiefpunkt besitzt.
Formuliert eine notwendige Bedingung dafür.

5) Betrachtet nun die Funktion $g(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x^2 - 1}$.
Diskutiert ausschließlich das Steigungsverhalten, indem ihr $g'(x)$ berechnet und die x-Achse in Abschnitte unterteilt, in denen der Graph von $g(x)$ steigt oder fällt (Monotonietabelle).
Wenn ihr Punkte mit waagrechter Tangente identifizieren könnt, berechnet auch deren y-Koordinaten.

Skizziert grob den Bereich des Graphen von $g(x)$, über den ihr nun eine Aussage treffen könnt, ohne weitere Werte zu berechnen.

D

Prüfungstraining Mathematik 2 – Expertenpuzzle „Funktionsgraphen“

Expertengruppe D: Symmetrien

Besprecht in eurer Gruppe folgende Fragen bzw. Arbeitsaufträge und löst die entsprechenden Aufgaben. Greift dabei auch auf Schulbücher oder Internet als Informationsquelle zurück.

Macht euch Notizen über die Lösungen sowie die wesentlichen mathematischen Inhalte, über die ihr in eurer Gruppe diskutiert, damit jeder einzelne von euch sie in der folgenden gemischten Gruppe anderen Kursteilnehmern vorstellen kann.

1) a) Gegeben sei eine beliebige Funktion $f(x)$, wobei $f(-x) = f(x)$ für alle x gilt.
Deutet diesen Zusammenhang anschaulich.
Zeichnet dazu einen beliebigen Funktionsgraphen für positive x-Werte und ergänzt ihn unter Berücksichtigung des gegebenen Zusammenhangs $f(-x) = f(x)$ für negative x.

b) Gegeben sei eine beliebige Funktion $f(x)$, wobei $f(-x) = -f(x)$ für alle x gilt.
Deutet diesen Zusammenhang anschaulich mit der gleichen Methode wie in 1).

2) a) Untersucht die Funktionen $f_1(x) = 5x^4 + 2x$ und $f_2(x) = 5x^4 - 2$ auf Symmetrie zur y-Achse.

b) Untersucht die Funktionen $f_3(x) = x^5 + x^2$ und $f_4(x) = x^5 - 2x$ auf Symmetrie zum Ursprung.

c) Findet eine Funktion mit Symmetrie zur x-Achse.

d) Stellt eine Vermutung darüber auf, welche Gestalt eine Polynomfunktion haben muss, damit sie achsensymmetrisch zur y-Achse bzw. punktsymmetrisch zum Ursprung ist.
(Tipp: Welche Potenzen kommen im Funktionsterm vor, welche nicht?)

3) Was lässt sich über die Symmetrie von $f'(x)$ aussagen, wenn $f(x)$ achsen- bzw. punktsymmetrisch ist? (vgl. 2a) und 2b) – was passiert mit den Potenzen beim Ableiten?)

4) Betrachtet am Computer (Geogebra) Funktionsgraphen von gebrochen rationalen Funktionen $f(x) = \frac{p_z(x)}{q_n(x)}$, wobei das Zählerpolynom $p_z(x) = a_z x^z + a_{z-1} x^{z-1} + ... + a_1 x + a_0$ den Grad z und das Nennerpolynom $q_n(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0$ den Grad n hat.
Unterscheidet dabei die 4 möglichen Kombinationen (p_z bzw. q_n achsen- bzw. punktsymmetrisch).

5) Untersucht nun (ohne Computer) die Funktion $g(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1}$ und deren Ableitung $g'(x)$ auf Symmetrie. Gilt die Regel aus 7) auch für gebrochen rationale Funktionen?

Prüfungstraining Mathematik 2 – Expertenpuzzle „Funktionsgraphen“

Expertengruppe E: Nullstellen

Besprecht in eurer Gruppe folgende Fragen bzw. Arbeitsaufträge und löst die entsprechenden Aufgaben. Greift dabei auch auf Schulbücher oder Internet als Informationsquelle zurück.

Macht euch Notizen über die Lösungen sowie die wesentlichen mathematischen Inhalte, über die ihr in eurer Gruppe diskutiert, damit jeder einzelne von euch sie in der folgenden gemischten Gruppe anderen Kursteilnehmern vorstellen kann.

1) Sucht jeweils ein einfaches Beispiel für eine Funktion mit:

   a) einer einfachen Nullstelle,

   b) einer doppelten Nullstelle,

   c) einer dreifachen Nullstelle,

   notiert die Funktionsterme und skizziert die Graphen dieser Funktionen.
   Wie verhält sich allgemein eine Funktion in der Umgebung einer *n*-fachen Nullstelle, wenn *n* gerade / ungerade ist?

2) Wie viele verschiedene Nullstellen kann eine ganzrationale Funktion *n*. Grades maximal besitzen? Wie viele muss sie mindestens besitzen?
   Unterscheidet auch hier zwischen geraden und ungeraden *n*.

   (Tipp: Betrachtet zum Beispiel die Funktionen $g_1(x) = x^2 - 1$, $g_2(x) = x^2 + 2x + 1$ und $g_3(x) = x^2 + 1$ sowie $u_1(x) = (x^2 - 1)(x + 2)$ und $u_2(x) = (x^2 + 1)(x + 2)$.)

3) Bestimmt die Nullstellen x_0 der Funktion $g_1(x) = x^2 - 1$ und berechnet die Ableitung $g_1'(x)$ sowie eine Stammfunktion $G_1(x)$.
   Zeigt die Ableitung an den Stellen x_0 irgendein auffälliges Verhalten?
   Zeigt die Stammfunktion an den Stellen x_0 irgendein auffälliges Verhalten?

4) Gegeben sei nun eine gebrochen rationale Funktion $f(x) = \dfrac{p_z(x)}{q_n(x)}$.

   (das Zählerpolynom hat den Grad *z*: $p_z(x) = a_z x^z + a_{z-1} x^{z-1} + ... + a_1 x + a_0$,
   das Nennerpolynom hat den Grad *n*: $q_n(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0$).

   Welche Relevanz haben die Nullstellen von $p_z(x)$ und $q_n(x)$ für die Nullstellen von $f(x)$?

5) Betrachtet nun die Funktion $g(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x^2 - 1}$.

   Berechnet die Nullstelle(n) von $g(x)$ und untersucht das Vorzeichenverhalten der Funktion in deren Umgebung.

   Skizziert grob den Bereich des Graphen von $g(x)$, über den ihr nun eine Aussage treffen könnt, ohne weitere Werte zu berechnen.

Mischgruppe: Kurvendiskussion

Bildet gemischte Gruppen, indem ihr in eurer Expertengruppe den Gruppenmitgliedern Nummern von 1 bis 6 vergebt und sich dann alle Experten mit gleicher Nummer in sechs neuen Gruppen zusammenfinden.

Bearbeitet in der Mischgruppe gemeinsam folgende Aufgaben:

1) Informiert die restlichen Kursteilnehmer über die in eurer Expertengruppe behandelten Inhalte und die erarbeiteten Ergebnisse.

   Ihr solltet damit das Handwerkszeug zur Untersuchung unbekannter Funktionen wiederholen und zusammenfassen:

   a) Definitionslücken / Polstellen
   b) Verhalten im Unendlichen / Asymptoten
   c) Stellen mit waagrechter Tangente / Extremstellen, Terrassenpunkte
   d) Symmetrien
   e) Nullstellen

2) Zeichnet nun gemeinsam die vollständigen Graphen von $g(x)$ und von $g'(x)$ (siehe Vorderseite eures Arbeitsblattes) in ein Diagramm.

   Aus den verschiedenen Expertengruppen wurden unterschiedliche „Informationen“ über den Graphen beigesteuert. Überlegt euch, wie man diese geschickt nutzen kann, um sich Arbeit zu sparen.

3) Wendet das Erlernte an und diskutiert die Funktion $h(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$.

Wenn ihr damit fertig seid, könnt ihr

1) betrachten, was mit den Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ passiert, wenn ihr

   a) eine Konstante addiert: $k_1(x) = g(x) + c$
   b) mit einer Konstanten multipliziert: $k_2(x) = c\, g(x)$
   c) $x - c$ anstatt x einsetzt: $k_3(x) = g(x - c)$
   d) $c \cdot x$ anstatt x einsetzt: $k_4(x) = g(c\,x)$

2) euch eigene gebrochen rationale Funktionen ausdenken und diskutieren.

Optionale Aufgabe für Expertengruppe A (Polstellen):

<u>NS raten bei Polynomen höherer Ordnung; Faktorisierung; Polynomdivision</u>

Angenommen ein normiertes* Polynom 3. Grades hat 3 Nullstellen: x_1, x_2 und x_3.
Dann lässt es sich faktorisiert so schreiben: $p(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, was sich wiederum ausmultiplizieren lässt zu $p(x) = x^3 - x^2\underbrace{(x_1 + x_2 + x_3)}_{-a_2} + x\underbrace{(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)}_{a_1} - \underbrace{x_1x_2x_3}_{-a_0}$.

Handelt es sich bei x_1, x_2 und x_3 um ganzzahlige Nullstellen, so sind diese also Teiler des konstanten Terms a_0 in $p(x)$. Dies lässt sich nutzen, um Nullstellen zu erraten.

<u>Beispiel:</u>
Wenn $p(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$ ganzzahlige Nullstellen besitzt, dann kommen dafür die Zahlen ±1, ±2, ±5 und ±10 in Frage, weil diese Teiler des konstanten Terms 10 sind. Durch Ausprobieren findet man heraus, welche dieser Zahlen wirklich Nullstellen sind: -1, +2 und +5.

<u>Aufgabe:</u>
Ratet die Nullstellen der folgenden Funktionen und versucht sie zu faktorisieren (ggf. mittels Polynomdivision):

$f_1(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ $\qquad$ $f_2(x) = x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 12x$ $\qquad$ $f_3(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

Findet eine gebrochen rationale Funktion mit Nennergrad $n > 0$, die *keine* Polstelle hat. Was muss dabei für n auf jeden Fall gelten? Ist z.B. $n = 3$ möglich?

*) „normiert“ heißt, der Koeffizient a_3 der höchsten Potenz x^3 ist gleich 1.

Optionale Aufgabe für Expertengruppe B (Asymptoten)

Schräge Asymptoten

Betrachtet das Verhalten der folgenden Funktionen im Unendlichen und deutet es:

$$f_1(x) = \frac{3x}{x^2 + 1} \qquad f_2(x) = \frac{3x^2}{x^2 + 1}$$

$$f_3(x) = \frac{3x^3 + 4x}{x^2 + 1} \qquad f_4(x) = \frac{2x^4 + 2x^2 + x}{x^2 + 1}$$

Hinweis:
Betrachtet Zähler- und Nennergrad. Wann liegt eine waagrechte Asymptote vor, wann eine schräge? Um eine Funktionsgleichung für die schräge Asymptote angeben zu können, muss eine Polynomdivision durchgeführt werden.

Optionale Aufgabe für Expertengruppe C (waagrechte Tangenten)

Unterscheidung HOP, TIP und TEP

Zeichnet die Graphen der Funktionen $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = -x^2$, $f_3(x) = x^3$ und $f_4(x) = x^3 - 2x^2$ sowie deren Ableitungen. Betrachtet das Vorzeichenverhalten der Ableitungen in der Nähe der Nullstelle. Was kann man daraus für das Verhalten der Funktion schließen?

Diskutiert, welche der Funktionen einen Hochpunkt (HOP, lokales Maximum), einen Tiefpunkt (TIP, lokales Minimum) oder einen Terrassenpunkt (TEP) hat.

Optionale Aufgabe für Expertengruppe D (Symmetrie)

Symmetrie zu anderen Geraden oder Punkten

Nehmt $f_1(x) = x^2$ und $f_2(x) = x^3$ als Beispiele für achsen- / punktsymmetrische Funktionen. Untersucht an diesen, wie sie sich bei folgenden Transformationen verhalten:

$$g_i(x) = f_i(x) + b \qquad b \in \mathbb{R}$$

$$h_i(x) = f_i(x - a) \qquad a \in \mathbb{R}$$

(Ihr könnt für *a* und *b* zunächst eine beliebige Beispielzahl verwenden)

Was muss für eine Funktion gelten, die zur Geraden $x = a$ achsensymmetrisch ist?

Was muss für eine Funktion gelten, die zum Punkt $P(a|b)$ punktsymmetrisch ist?

Optionale Aufgabe für Expertengruppe E (Nullstellen):

NS raten bei Polynomen höherer Ordnung; Faktorisierung; Polynomdivision

Angenommen ein normiertes* Polynom 3. Grades hat 3 Nullstellen: x_1, x_2 und x_3.
Dann lässt es sich faktorisiert so schreiben: $p(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, was sich wiederum ausmultiplizieren lässt zu $p(x) = x^3 - x^2\underbrace{(x_1 + x_2 + x_3)}_{-a_2} + x\underbrace{(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)}_{a_1} - \underbrace{x_1x_2x_3}_{-a_0}$.

Handelt es sich bei x_1, x_2 und x_3 um ganzzahlige Nullstellen, so sind diese also Teiler des konstanten Terms a_0 in $p(x)$. Dies lässt sich nutzen, um Nullstellen zu erraten.

Beispiel:
Wenn $p(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$ ganzzahlige Nullstellen besitzt, dann kommen dafür die Zahlen ±1, ±2, ±5 und ±10 in Frage, weil diese Teiler des konstanten Terms 10 sind. Durch Ausprobieren findet man heraus, welche dieser Zahlen wirklich Nullstellen sind: -1, +2 und +5.

Aufgabe:
Ratet die Nullstellen der folgenden Funktionen und versucht sie zu faktorisieren (ggf. mittels Polynomdivision):

$f_1(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ $f_2(x) = x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 12x$ $f_3(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

Findet Polynome mit Grad $n > 0$, die *keine* Nullstellen haben. Was muss dabei für n auf jeden Fall gelten? Ist z.B. $n = 3$ möglich? Wie sehen die Graphen solcher Polynomfunktionen aus?

*) „normiert" heißt, der Koeffizient a_3 der höchsten Potenz x^3 ist gleich 1